ΘΕΩΡΗΜΑ (FUBINI)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_R f(x,y)\, d(x,y)$

εαν $f(x,y)=x^2+y^2$ και $R=[-1,1]\times[0,1]$

ΛΥΣΗ

Εχουμε το R, ένα κλειστό ορθογώνιο

Η x^2+y^2 συνεχής ως το αθροισμα των τετραγώνων των προβολών $(x,y)\mapsto x$ και $(x,y)\mapsto y$, οι οποίες συνεχείς συναρτησεις

Αρα, η f ολοκληρώσιμη συνάρτηση και άρα απο Θ. fibuni

$$\int_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{-1}^1 (x^2+y^2)\,dx\right)dy = \int_0^1\left(\int_{-1}^1\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)'dx\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{-1}^1 dy = \int_0^1\left(\frac{1}{3}+y^2+\frac{1}{3}+y^2\right)dy =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{2}{3}+2y^2\right)dy = \left[\frac{2}{3}y+2\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

ομοια και αν το επιλέξουμε ως εξής:

$$\int_R (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^1\left(\int_0^1 (x^2+y^2)\,dy\right)dx = \int_{-1}^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx = \frac{4}{3}$$

2) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S \cos x\cdot \sin y\; d(x,y)$

οπου $S=[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]$.

ΛΥΣΗ

ομοια με την (1) ισχύει το Θ. fibuni, άρα

$$\int_S \cos x\cdot\sin x\; d(x,y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\pi/2}\cos x\cdot\sin y\,dx\right)dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin y\left(\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx\right)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y\,dy = 1$$

ομοια και αν ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y και μετά ως προς το x, θα προκύψει το ίδιο αποτέλεσμα

3) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{0}\int_{1}^{2}(-x\cdot \log y)\,d(x,y)$

ΛΥΣΗ

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{1}^{2}(-x\cdot\log y)\,dy\right)dx = \int_{-1}^{0} -x\left(\int_{1}^{2}\log y\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} -x\left([y\cdot\log y]_1^2 - \int_1^2 1\,dy\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} -x\,(2\log 2 - (2-1))\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} -x\,(2\log 2 - 1)\,dx = -2\log 2 + 1\cdot\int_{-1}^{0} x\,dx = \log 2 - \frac{1}{2}$$

4) Εάν $R=[0,2]\times[-1,0]$, να υπολογιστεί το ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$\int_R (|y|\cdot\cos\tfrac{1}{4}\pi x)\,dy\,dx$$

ΛΥΣΗ

$$\int_{-1}^{0}\left(\int_{0}^{2}(|y|\cos\tfrac{1}{4}\pi x)\,dy\right)dx = \int_{-1}^{0}\cos\tfrac{1}{4}\pi x\cdot\left(\int_0^2 |y|\,dy\right)dx \overset{y>0}{=}$$

$$\overset{y>0}{=}\int_{-1}^{0}\cos\tfrac{1}{4}\pi x\left(\int_0^2 y\,dy\right)dx = \int_{-1}^{0}\cos\tfrac{1}{4}\pi x\,\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 dx =$$

$$= \int_{-1}^{0}\cos\tfrac{1}{4}\pi x\cdot 2\,dx = 2\int_{-1}^{0}\cos\tfrac{1}{4}\pi x\,dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{0}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)dx = 2\cdot\frac{4}{\pi}\int_{-1}^{0}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)'dx =$$

$$= \frac{8}{\pi}\cdot\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_{-1}^{0} = \frac{8}{\pi}\cdot\left(-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= -\frac{8}{\pi}\,\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = -4\frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$